Matematika 1: první test **skupina A**

Příklad 1. Která z čísel $x = -3, 1, 2$ jsou kořenem polynomu $P(x)$? V případě, že se jedná o kořen, zapište částečný rozklad polynomu.

$$P(x) = x^5 + 6x^4 + 10x^3 - 11x - 6.$$

Příklad 2. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \log \frac{x^2+1}{10x^2-2}$$

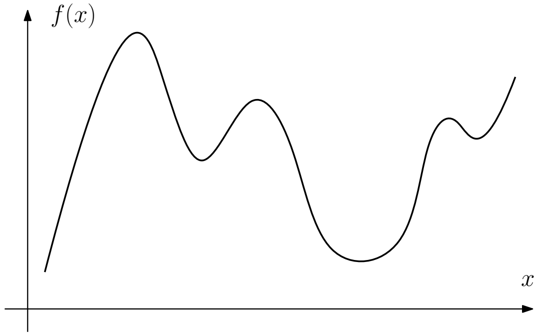
Příklad 3. Zderivujte a dále neupravujte

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{2x^2+\sin x}\right) - \sqrt{x}8^{\operatorname{cotg} x}$$

Příklad 4. Určete Taylorův polynom řádu $n = 3$ funkce $f(x)$ se středem v bodě $x_0 = \sqrt{\pi}$

$$f(x) = \sin(x^2)$$

Příklad 5. Vyznačte v grafu funkce $f(x)$ nebo v definičním oboru místa, kde $f'(x) < 0$. V kolika bodech je $f'(x) = 0$?



Příklad 6. Najděte Lagrangeův interpolační polynom funkce, jestliže byly v uzlech x_i získány hodnoty y_i.

x_i	-2	1	2
y_i	4	-2	-3

Matematika 1: první test — skupina B

Příklad 1. Zapište schéma rozkladu funkce $f(x)$ na parciální zlomky, konkrétní hodnoty koeficientů nepočítejte.

$$f(x) = \frac{6x^3 - 15x^2 + 6x - 7}{2x^3 - 5x^2 + 3x - 2}$$

Příklad 2. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{cotg} \frac{4x^3}{x^2 + x + 1}$$

Příklad 3. Zderivujte a dále neupravujte

$$f(x) = \cos\left(\ln \frac{e^{-x}}{\operatorname{tg} x}\right) + \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x^2}$$

Příklad 4. Vyjádřete polynom $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + 15x - 8$ v mocninách $(x + 1)$.
Nápověda: Určete Taylorův polynom se středem v $x = -1$ a řádem $n = \dots$

Příklad 5. Nakreslete libovolnou funkci $f(x)$ na intervalu $x \in \langle 1, 6\rangle$, která zároveň splňuje:
$f'(x) < 0$ pro $x \in \langle 1, 2\rangle$, $f'(x) > 0$ pro $x \in \langle 4, 6\rangle$ a na int. $(2, 4)$ jsou alespoň tři body, kde $f'(x) = 0$.

Příklad 6. Je dána rovnice

$$\frac{x}{\pi} \cos x - 1 = 0.$$

(a) Ukažte, že na int. $\langle 0, 2\pi\rangle$ existuje řešení této rovnice.
(b) Pomocí metody bisekce odhadněte řešení při volbě startovacího intervalu výše. Určete 3. iteraci (tj. x_3).

Matematika 1: první test — skupina C

Příklad 1. Zapište schéma rozkladu funkce $f(x)$ na parciální zlomky, konkrétní hodnoty koeficientů nepočítejte.

$$f(x) = \frac{3x^4 - 4x^2 + 5}{(x^2 - x - 6)^2(2x^2 - 2x + 3)^2}$$

Příklad 2. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 2_+} \operatorname{tg} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4}$$

Příklad 3. Zderivujte a dále neupravujte

$$f(x) = \frac{3x^4}{\sin(\ln x)} + 5\sqrt{\operatorname{cotg} \frac{1}{x^2}}$$

Příklad 4. Určete Taylorův polynom řádu $n = 2$ funkce $f(x)$ se středem v bodě $x_0 = 2$

$$f(x) = \ln(x^2 - 3)$$

Příklad 5. Udejte příklad libovolné <u>nekonstantní</u> funkce $f(x)$ tak, aby $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Předpis funkce musí obsahovat dekadický logaritmus „log“ - v libovolné formě.

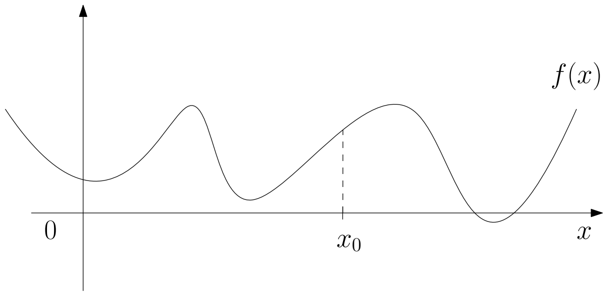
Příklad 6. Grafickou metodou identifikujte počet řešení rovnice

$$2^{-x} + x^2 - 4 = 0.$$

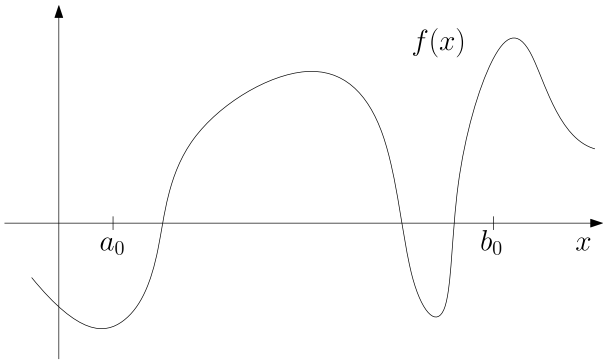
Pro každé řešení odhadněte interval, na němž se přesné řešení nachází; existenci řešení ověřte.

Další zajímavé úlohy (i do písemky)

Příklad 1. K funkci $f(x)$ nakreslete přímku $y = kx + q$, pro kterou platí $k = f'(x_0)$ a $q = f(0)$.



Příklad 2. Hledá se řešení rovnice $f(x) = 0$, přičemž funkce $f(x)$ je vyobrazena níže. Na daném intervalu $\langle a_0, b_0 \rangle$ se nachází 3 možná řešení zadané rovnice. Graficky znázorněte 3 iterace metody bisekce, přičemž vyjděte z intervalu $\langle a_0, b_0 \rangle$. (Tj. zobrazte hodnoty a_1, b_1, a_2, b_2 a x_1, x_2, x_3). Rozhodněte, ke kterému z možných řešení bude metoda bisekce konvergovat.



Příklad 3. Hledáme řešení rovnice $f(x) = 0$ na zadaném intervalu. Ověřte, zda uvedené případy splňují podmínky konvergence metody regula falsi.

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ na int. $\langle 1, 2 \rangle$,
2. $f(x) = \sin x - x^3 - 1$ na int. $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Další zajímavé úlohy (i do písemky)

Příklad 4. V obrázku funkce načrtněte Taylorovy polynomy řádu $n = 0$ a $n = 2$ se středem v bodě x_0 a na ose y vyznačte hodnoty $f(x_0 + h)$, $T_0(x_0 + h)$ a $T_2(x_0 + h)$.