

# PŘÍKLADY K PŘEDNÁŠCE BA004

## 1.1 Zavedení náhodné veličiny a náhodného vektoru

**Příklad 1 (náhodná veličina).** Náh. vel.  $X$  má

- (i) pstní fci  $p(x) = c(1+x^2)$ ,  $x = -1, 1, 2$ . Určete: (a) obor hodnot  $\Omega$ , (b) konst.  $c \in \mathbb{R}$ , (c) nakreslete  $p(x)$ .
- (ii) pstní fci  $p(x) = c\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ ,  $x = 1, 2, 3, \dots$ . Určete: (a) obor hodnot  $\Omega$ , (b) konstantu  $c \in \mathbb{R}$ .
- (iii) hustotu  $f(x) = ce^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ . Parametr  $\lambda > 0$  je (pevně) dané číslo. Určete konstantu  $c \in \mathbb{R}$ .

**Příklad 2 (náhodný vektor).** Máme náh. vek.  $\mathbf{X} = (X, Y)$ . Určete konstantu  $c \in \mathbb{R}$  tak, aby

- (i)  $p(x, y) = c(x^2 + 3y)$ ,  $(x, y) \in \{0, 1, 2\} \times \{1, 3\}$ , byla pstní funkce  $\mathbf{X}$ ,
- (ii)  $f(x, y) = cx(1 + e^y)$ ,  $(x, y) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$ , byla hustotou  $\mathbf{X}$ ,

## 1.2 Pravděpodobnost

**Příklad 3 (pravděpodobnost).** Mějme náh. vel.  $X$ .

- (i)  $X \sim p(x)$ , kde  $p(x) = \frac{x+1}{16}$  pro  $x = 0, 1, 2, 3, 5$ . Určete  $P(-1 \leq X \leq 1)$ ,  $P(X \leq 2)$ ,  $P(X = 2)$ ,  $P(X \neq 3)$ ,  $P(X > \frac{5}{6})$ .
- (ii)  $X \sim \text{Bi}(4, \frac{1}{2})$ , tj.  $X$  má tzv. binomické rozdělení s pstní funkcí

$$p(x) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Určete  $P(X = 2)$ ,  $P(X = 2.1)$ ,  $P(X > 1)$ .

- (iii)  $X \sim f(x)$ , kde  $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$  pro  $x \in \mathbb{R}$ . Určete  $P(X > 1)$ ,  $P(-1 \leq X \leq 1)$ ,  $P(X \leq \sqrt{3})$ ,  $P(X < \sqrt{3})$ .
- (iv)  $X \sim p(x)$ , kde  $p(x) = K \cdot 0.7^x$  pro  $x = 1, 2, \dots$ . Určete  $K \in \mathbb{R}$ ,  $P(X \geq 2)$ .

## 1.3 Distribuční funkce

**Příklad 4 (distribuční funkce pro kostku).** Náh. veličina  $X$  udává počet ok, která padnou na ideální šestistěnné kostce, tj.  $X \sim p(x) = \frac{1}{6}$ ,  $x = 1, 2, \dots, 6$ . Nakreslete pstní funkci  $p$ , určete hodnoty distr. funkce  $F(-1)$ ,  $F(2)$ ,  $F(2.1)$ ,  $F(2.8)$ ,  $F(7)$  a určete  $F(x)$  a funkci  $F$  nakreslete.

**Příklad 5 (vlastnosti distribuční funkce).** Určete, které z vlastností (F1)-(F3), (F6), (F8) dané funkce nesplňují. Navrhnete vylepšení, aby dané funkce byly distr. funkciemi.

$$(a) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$(c) \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(b) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

$$(d) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$

**Příklad 6 (konstanty distribuční funkce).** Pro která  $a, b \in \mathbb{R}$  je  $F(x) = a + b \operatorname{arctg} x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , distribuční funkcií? Určete dále pravděpodobnost  $P(-1 \leq X \leq 1)$ , určete hustotu  $f(x)$ .

**Příklad 7 (konstanty distribuční funkce).** Určete  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby  $F(x)$  byla distribuční funkcí (a) spojité náh. veličiny, (b) náh. veličiny. Pro (a) určete dále  $P(X < 1)$ ,  $P(X > 1.5)$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ax^3, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

**Příklad 8 (je distribuční funkce?).** Je  $F(x)$  distr. funkcí nějaké náh. veličiny?

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{x+1}, & x \geq 0. \end{cases}$$

**Příklad 9 (distribuční funkce).** Je dána hustota  $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} c & -1 \leq x < 1, \\ cx^2 & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Nakreslete  $f(x)$ , (b) určete distr. funkci  $F(x)$ , (c) nakreslete  $F(x)$ , (d) pomocí  $f, F$  spočítejte  $P(X \leq 1.4)$ ,  $P(X = 1.4)$ ,  $P(X < 1.6)$ ,  $P(0 \leq X \leq 1.9)$ .

**Příklad 10 (distribuční funkce).** Je dána distr. funkce  $F(x)$ . Určete (a)  $P(X = 1), P(X = 2)$ , (b) pstní funkci  $p(x)$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3, \\ \frac{1}{5}, & -3 \leq x < -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \leq x < 1, \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 5, \\ 1, & 5 \leq x. \end{cases}$$

## 1.4 Marginální rozdělení pravděpodobnosti

**Příklad 11 (marginální pravděpodobnostní funkce).** Náh. vektor  $\mathbf{X} = (X, Y)$  má sdruženou pravděpodobnostní funkci

$$p(x, y) = \frac{1}{12} \frac{x}{y^2 + 1}, \quad \Omega = \{0, 1, 2, 3\} \times \{-1, 0, 1\}.$$

Určete marg. pravděpodobnostní funkce veličin  $X$  a  $Y$ .

**Příklad 12 (marginální pravděpodobnostní funkce).** Viz předchozí. Jsou veličiny  $X, Y, Z$  nezávislé?

## 1.6 Číselné charakteristiky náhodných veličin a vektorů

**Příklad 13 (střední hodnota Poissonova rozdělení).**  $X \sim \text{Po}(\lambda)$ , tj.  $X$  má Poissonovo rozdělení s pstní funkcí  $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ , kde  $\lambda > 0$  je daný parametr. Odvod'te střední hodnotu.

**Příklad 14 (střední hodnota normálního rozdělení).**  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ , tj.  $X$  má normální rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right], \quad x \in \mathbb{R},$$

a parametry  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ . Odvod'te střední hodnotu.

**Příklad 15 (rozptyl Poissonova rozdělení).** Odvodte rozptyl Poissonova rozdělení,

$$X \sim p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Dále určete  $E(2X + 1)$ ,  $D(2X + 1)$ ,  $D(4 - X)$ .

**Příklad 16 (standardizace).** Nechť  $X$  je náh. veličina se střední hodnotou  $E X = \mu$  a rozptylem  $D X = \sigma^2$ ,  $|E X| < \infty$ ,  $0 < D X < \infty$ . Odvodte střední hodnotu a rozptyl veličiny  $U = (X - \mu)/\sigma$ .

**Příklad 17 (číselné char. I).** Náhodná veličina  $X$  má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & -1 \leq x \leq 2, \\ c & 2 < x \leq 3, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete (a) konstantu  $c \in \mathbb{R}$ , (b) distribuční funkci  $F(x)$ , (c) střední hodnotu  $E X$ , (d) rozptyl  $D X$ , (e) modus  $Mo(X)$ , (f) medián.

**Příklad 18 (číselné char. II).** Náhodná veličina  $X$  má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} c & -1 \leq x \leq 1, \\ cx^2 & 1 < x \leq 2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete (a) konstantu  $c \in \mathbb{R}$ , (b) distribuční funkci  $F(x)$ , (c) střední hodnotu  $E X$ , (d) rozptyl  $D X$ , (e) modus  $Mod(X)$ , (f) medián a 90% kvantil.

**Příklad 19 (číselné char. III).** Náhodná veličina  $X$  má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & -1 \leq x < 0, \\ ce^{-x} & 0 \leq x, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete (a) konstantu  $c \in \mathbb{R}$ , (b) distribuční funkci  $F(x)$ , (c) střední hodnotu  $E X$ , (d) modus  $Mod(X)$ , (e) 90% kvantil.

**Příklad 20 (korel. koeficient).** Mějme náh. vektor  $\mathbf{X} = (X, Y) \sim p(x, y) = \frac{1}{5}$  na  $\Omega = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ . Určete, zda jsou  $X, Y$  nezávislé; určete  $\rho(X, Y)$ .

## 1.7 Vybraná diskrétní rozdělení

**Příklad 21 (diskrétní rozdělení).** Střelec střílí 10krát nezávisle na terč. Pravděpodobnost zásahu terče při jednom výstřelu je 0.8. Jaká je pst, že střelec mine terč nejvýše jednou? Určete nejpravděpodobnější počet zásahů.

**Příklad 22 (diskrétní rozdělení).** V osudí je 10 bílých a 25 černých míčků. Náhodně vybereme 6 míčků. Jaká je pst, že mezi vybranými míčky budou právě 2 černé, jestliže provádíme (a) výběr bez vracení, (b) výběr s vracením?

**Příklad 23 (diskrétní rozdělení).** Při provozu balícího automatu dojde během jedné směny (8 hod.) průměrně ke 2 poruchám. Jaká je pst, že během 24 hodin nedojde ani jednou k poruše?

**Příklad 24 (diskrétní rozdělení).** Firma přepravuje 500 výrobků. Pravděpodobnost poškození jednoho během přepravy je 0.002. Určete pst, že se během přepravy rozbití alespoň jeden výrobek.

## 1.8 Vybraná spojité rozdělení

**Příklad 25 (normální rozdělení).** Na automatické lince se plní krabice mlékem. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že linka produkuje krabice mléka se střední hodnotou 998 ml a směrodatnou odchylkou 10 ml. Předpokládejte, že objem mléka v krabici je náh. veličina s normálním rozdělením.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krabice bude obsahovat alespoň 990 ml mléka?
- (b) Určete objem mléka, který s pravděpodobností 0.95 nebude překročen.

## Aproximace rozdělení

**Příklad 26 (aproximace rozdělení).** Ve skladu je 5000 výrobků stejného typu. Pravděpodobnost, že určitý výrobek je zmetek je 0.01.

- (a) Určete pravděpodobnost, že ve skladu je více než 5 zmetků.
- (b) Určete pravděpodobnost, že ve skladu je více než 65 zmetků.
- (c) Určete pravděpodobnost, že ve skladu je 48 zmetků.

## 2.1 Bodové odhady

**Příklad 27 (bodové odhady).** Je dán náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z rozdělení s konečnou střední hodnotou  $\mu$  a konečným rozptylem  $\sigma^2$ . Určete střední hodnotu a rozptyl statistik  $\bar{X}$  a  $T = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$ .

**Příklad 28 (výběrový rozptyl).** Dokažte, že výběrový rozptyl  $S^2$  je nestranným odhadem rozptylu  $\sigma^2$ .

**Příklad 29 (hmotnost).** Výrobce dodává zboží v balíčcích o předepsané hmotnosti. Bylo vybráno náhodně 15 balíčků a naměřeno (v g):

$$\begin{array}{cccccccc} 238 & 256 & 266 & 240 & 260 & 235 & 263 & 259 \\ 234 & 258 & 253 & 265 & 234 & 245 & 237 \end{array}$$

Určete nestranný konzistentní odhad střední hodnoty a rozptylu hmotnosti balíčků.

**Příklad 30 (rybník).** Při výlovu rybníka byly zaznamenány hmotnosti vylovených kaprů:

hmotnost	(0.5, 1)	(1, 1.5)	(1.5, 2)	(2, 2.5)	(2.5, 3)	(3, 3.5)	(3.5, 4)
četnost	75	90	97	63	48	42	10

Určete nestranný konzistentní odhad střední hodnoty a rozptylu hmotnosti kaprů.

**Příklad 31 (autobus- $b$ ).** Autobus odjíždí ze zastávky v  $b$ -minutových intervalech. Náš příchod na zastávku je náhodný, tedy doba čekání do odjezdu  $X$  je náhodná veličina,  $X \sim \text{Ro}(0, b)$ .

Cílem je odhadnout parametr  $b$ . Určete, která ze statistik  $2\bar{X}$  a  $\max\{X_1, \dots, X_n\}$  je vhodnějším odhadem  $b$ , kde  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z  $\text{Ro}(0, b)$ . Je některý z těchto odhadů konzistentním odhadem parametru  $b$ ?

## 2.2 Intervalové odhady

**Příklad 32 (máslo).** Máslo se strojově porcuje a balí na automatické lince. U náhodně vybraných vzorků byly zjištěny tyto hmotnosti másla (v gramech):

$$\begin{array}{ccccccc} 242 & 250 & 253 & 246 & 247 & 257 \\ 251 & 253 & 249 & 254 & 247 & 254 \end{array}$$

Předpokládejte, že hmotnost másla je náhodná veličina s normálním rozdělením. Určete:

- (a) nestranný konzistentní odhad střední hodnoty a rozptylu hmotnosti másla,
- (b) v jakých mezích lze s 95 % spolehlivostí očekávat střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku hmotnosti másla,
- (c) průměrnou hmotnost másla, která s 95 % spolehlivostí nebude překročena,

**Příklad 33 (žárovky).** Sledujeme dobu životnosti žárovek od určitého výrobce. Byly naměřeny údaje v hodinách:

životnost	$\langle 700, 800 \rangle$	$\langle 800, 900 \rangle$	$\langle 900, 1000 \rangle$	$\langle 1000, 1100 \rangle$	$\langle 1100, 1200 \rangle$
četnost	2	6	20	15	7

Výrobce udává střední životnost 1000 h. Předpokládejte, že životnost žárovky je náh. vel. s normálním rozdělením.

- (a) Určete nestranný konzistentní odhad rozptylu životnosti.
- (b) Pomocí jednostranného int. spoleh. určete dolní mez pro rozptyl, aby pravděpodobnost překročení byla 0.99.
- (c) ... jako v (b) pro směrodatnou odchylku.

**Příklad 34 (prací prášek).** Automat plní krabice pracím práškem. Byly naměřeny odchylky od váženého množství 2 kg (v g):

-50    10    -10    -80    70    -60

Předpokládejte, že odchylka hmotnosti je náhodná veličina s normálním rozdělením.

- (a) Určete 95% intervalový odhad rozptylu naměřených odchylek.
- (b) ... jako v (a), jestliže plnění není zatíženo systematickou chybou.

## 2.3 Testování statistických hypotéz o parametrech normálního rozdělení

**Příklad 35 (máslo pokračování).** ...viz příklad č. 32 (dříve vyšlo:  $\bar{x} = 250.25, s^2 = 18.023$ ) Je statisticky významný rozdíl mezi průměrnou hmotností a předepsanou hmotností 250 g? Testujte na hladině významnosti 0.05.

**Příklad 36 (autobus).** Autobusu trvá v době špičky cesta mezi dvěma místy průměrně 24 min. Uvažovalo se o tom, zda by změna trasy nevedla ke snížení potřebného času. Na nové trase byly naměřeny doby přepravy [v min.]:

22.2    24.5    26.3    23.1    24.5    21.7  
20       20.8    22.3    19.6    20.5    21

Předpokládejte, že doba přepravy je náhodná veličina s normálním rozdělením.

- (a) Určete nejlepší nestranný konzistentní bodový odhad střední hodnoty a rozptylu nové přepravní doby;
- (b) Na hladině významnosti 0.05 ověřte, zda nová trasa má statisticky významně rozdílnou dobu přepravy oproti původní trase;
- (c) Na hladině významnosti 0.05 ověřte, zda změna trasy vedla ke snížení průměrné přepravní doby oproti původní trase.

**Příklad 37 (pivo).** Výrobce piva udává u objemu  $\frac{1}{2}$  litrových lahví přesnost plnění vyjadřenou směrodatnou odchylkou 0.05 l. Náhodně bylo vybráno 20 lahví a bylo zjištěno  $s_0^2 = 0.00046$ . Na hladině významnosti  $\alpha = 0.01$  ověřte tvrzení výrobce o přesnosti plnění. Předpokládejte, že plnění lahví probíhá bez systematické chyby a že objem piva v lahvích je náhodná veličina s normálním rozdělením.

**Příklad 37.b (test u alternativního rozdělení).** Dosud jsme odebírali součástky od výrobce A, který měl průměrně 6% zmetkovitost. Nově odebíráme součástky od výrobce B. Kontrolou 250 náhodně vybraných součástek se zjistilo, že je mezi nimi 20 zmetků. Na hl. významnosti  $\alpha = 0.05$  ověřte předpoklad

- (a) o zhorení kvality výrobků po změně výrobce,
- (b) o stejně kvalitě výrobků od obou výrobců.

## 2.4 Pearsonův $\chi^2$ test dobré shody

**Příklad 38 ( $\chi^2$  kostka).** Po několika hodech šestistennou kostkou jsme získali četnosti hodů ok na kostce. Na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  ověřte, zda je kostku možné považovat za falešnou.

počet ok	1	2	3	4	5	6
četnost	10	14	7	15	11	5

**Příklad 39 ( $\chi^2$  tabule).** Prohlídka 500 tabulí skla byly zjištěny tyto počty bublin v jednotlivých tabulích.

# bublin	0	1	2	3	4 a více
# tabulí	246	181	64	7	2

Na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  ověřte, zda má počet bublin (a) Poissonovo rozdělení  $\text{Po}(2)$ ; (b) Poissonovo rozdělení.

**Příklad 40 ( $\chi^2$  analýzy).** U 50 chemických analýz byly zjištěny koncentrace určité látky v roztoku. Na hladině významnosti 0.05 ověřte, zda je možné měření považovat za realizaci náhodného výběru z normálního rozdělení.

koncentrace [%]	39	40	41	42	43	44	45
počet	3	5	11	16	8	4	3

**Příklad 41 ( $\chi^2$  pozorování).** Bylo získáno 40 pozorování (viz níže). Na hladině významnosti 0.05 ověřte, zda se jedná o realizaci výběru z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{2}{9}(x - 1), \quad 1 \leq x \leq 4.$$

index $j$	třída	četnost $n_j$
1	1.0–1.5	1
2	1.5–2.0	4
3	2.0–2.5	5
4	2.5–3.0	6
5	3.0–3.5	6
6	3.5–4.0	18

**Příklad 42 ( $\chi^2$  normalita).** Na hladině významnosti 0.05 ověřte, zda lze naměřená data níže považovat za realizaci náhodného výběru ze standardizovaného normálního rozdělení  $N(0, 1)$ .

data	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
četnost	3	10	8	12	3	5

**Příklad Extra ( $\chi^2$  vejce).** Byl sledován počet rozbitych vajec v jednotlivých malých platech (po 6 vejcích). Na hladině významnosti 0.05 ověrte, zda se počty rozbitych vajec řídí binomickým rozdělením.

rozbitych	0	1	2	3	4	5	6
četnost	28	15	2	4	1	0	0