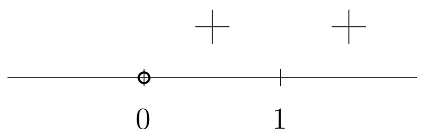
# Průběh funkce - řešené příklady

## A. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x \ln^2 x$

**1. definiční obor:** $D(f) = (0, \infty)$

**2. nulové body:** $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln^2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (řešení $x = 0 \notin D(f)$)

**3. znaménka funkce:**

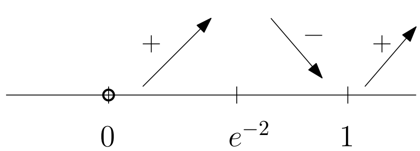



$f(2) = 2 \cdot (\ln 2)^2 > 0$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot (\ln \frac{1}{2})^2 > 0$

**4. stacionární body, rostoucí/klesající:**

$$f'(x) = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2)$$

$D(f') = (0, \infty)$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ nebo $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ nebo $x = e^{-2}$
$\Rightarrow$ stacionární body jsou $x = 1, x = e^{-2}$

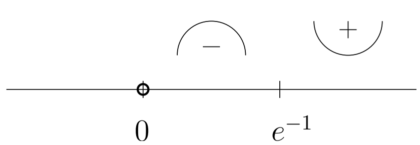



$f'(e) = 1 \cdot (1 + 2) > 0$
$f'(e^{-1}) = -1 \cdot (-1 + 2) < 0$
$f'(e^{-2}) = -3 \cdot (-3 + 2) > 0$

**5. konvexní/konkávní, inflexní body:**

$$f''(x) = \frac{1}{x}(\ln x + 2) + \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(1 + \ln x)$$

$D(f'') = (0, \infty)$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$




$f''(1) = 2 \cdot (1 + 0) > 0$
$f''(e^{-2}) = \frac{2}{e^{-2}}(1 - 2) < 0$

Inflexní bod je $x = e^{-1}$.
Typy extrémů můžeme ověřit pomocí dosazení stacionárních bodů:
$f''(1) > 0 \Rightarrow x = 1$ je lokální minimum,
$f''(e^{-2}) < 0 \Rightarrow x = e^{-2}$ je lokální maximum.
Dopočítáním funkčních hodnot máme lokální minimum v bodě $[1, 0]$ a lokální maximum v bodě $[e^{-2}, 4e^{-2}]$.

**6. asymptoty bez směrnice:** Hledáme v bodě $x = 0$ a vzhledem k $D(f)$ počítáme jen

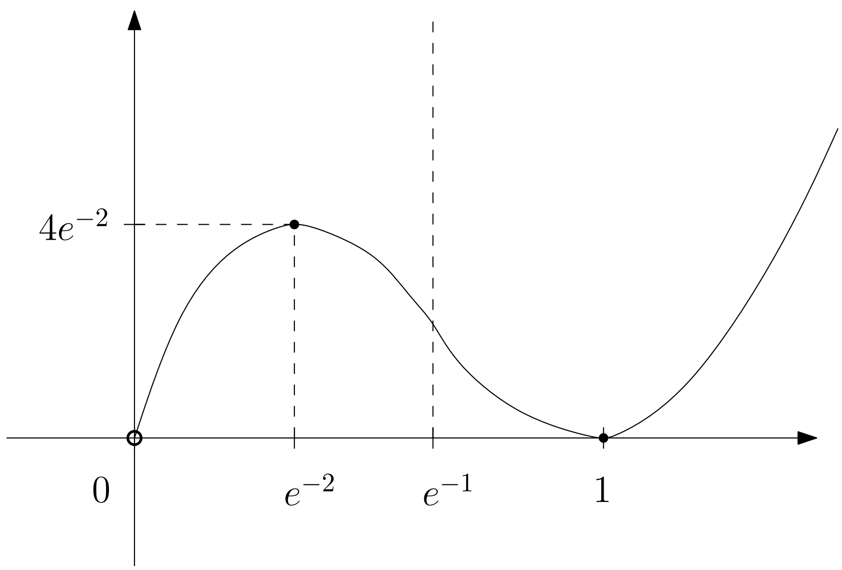
$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} x\ln^2 x = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0_+} \frac{2\frac{1}{x}\ln x}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{2\ln x}{\frac{-1}{x}} =$$

$$= \left|\frac{-\infty}{-\infty}\right| = \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{-2}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ není asymptota.}$$

**7. asymptoty se směrnicí:** Hledáme asymptotu $y = kx+q$ vzhledem k $D(f)$ jen pro $x \to \infty$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \ln^2 x = \infty \Rightarrow \text{ asymptota se směrnicí žádná není.}$$

**8. náčrt funkce:**

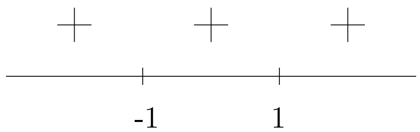


# B. Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

**1. definiční obor:** $D(f) = \mathbb{R}$

**2. nulové body:** $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

**3. znaménka funkce:**

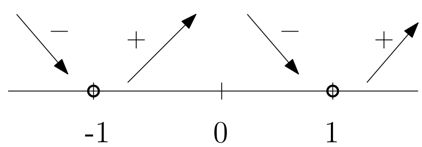



$f(2) = \sqrt[3]{9} > 0$
$f(0) = \sqrt[3]{1} > 0$
$f(-2) = \sqrt[3]{9} > 0$

**4. stacionární body, rostoucí/klesající:** $f(x) = (x^2-1)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

$D(f') = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\Rightarrow$ stacionární bod je $x = 0$



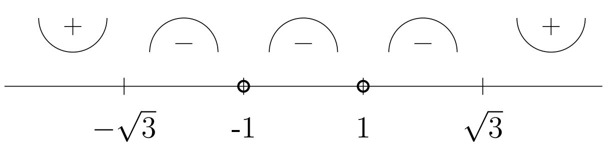

$f'(2) = +/+ > 0$
$f'(1/2) = +/- < 0$
$f'(-1/2) = -/- > 0$
$f'(-2) = -/+ < 0$

**5. konvexní/konkávní, inflexní body:**

$$f''(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x^2-1} - x \cdot \frac{1}{3}(x^2-1)^{-2/3} \cdot 2x}{(x^2-1)^{2/3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{(x^2-1)^{-2/3}\left[(x^2-1) - \frac{2}{3}x^2\right]}{(x^2-1)^{2/3}} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{4/3}}$$

$D(f'') = \mathbb{R} = \{-1, 1\}$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$




$f''(3) = +/+ > 0$
$f''(\sqrt{2}) = -/+ < 0$
$f''(0) = -/+ < 0$
$f''(-\sqrt{2}) = -/+ < 0$
$f''(-3) = +/+ > 0$

Inflexní body jsou $x = \pm\sqrt{3}$.
Typy extrémů můžeme ověřit pomocí dosazení stacionárních bodů:
$f''(0) < 0 \Rightarrow x = 1$ je lokální maximum. Dopočítáním funkčních hodnot máme lokální maximum v bodě $[0, 1]$.

***POZOR!*** *Protože body $x = \pm 1 \in D(f)$, ale $x = \pm 1 \notin D(f')$, je nutné je vyšetřit zvlášť (nelze pomocí derivace, jedná se o tzv.* ***hroty****). Nejjednodušší způsob je dle obrázku pro rostoucí a klesající - zde je vidět, že v obou bodech jsou lokální minima o souřadnicích $[-1, 0], [1, 0]$.*
*Jiná situace by nastala, pokud by body $\pm 1 \notin D(f)$.*

**6. asymptoty bez směrnice:** Protože $D(f) = \mathbb{R}$, je zřejmé, že asymptoty bez směrnice neexistují.

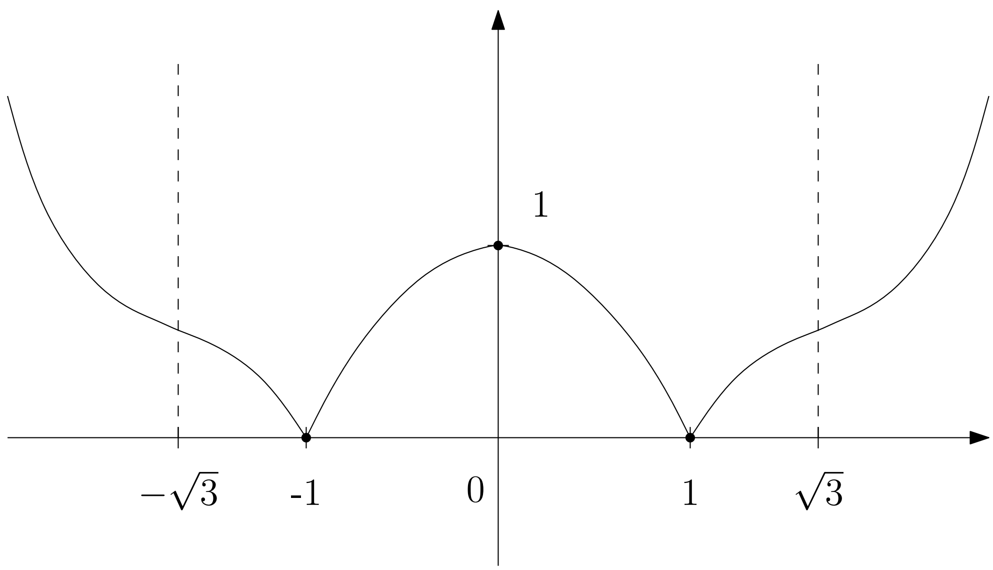
**7. asymptoty se směrnicí:** Hledáme asymptoty $y = k_i x + q_i, i = 1, 2$ Pro $x \to \infty$

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-1)^{2/3}}{x} =$$
$$= \left| \frac{\infty}{\infty}, \text{ ale zde vyhrává vyšší mocnina (nahoře je nejvyšší } x^{4/3}) \right| = \infty$$
$$\Rightarrow \text{ asymptota neexistuje.}$$

Pro $x \to -\infty$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-1)^{2/3}}{x} =$$
$$= \left| \frac{\infty}{-\infty}, \text{ ale zde vyhrává vyšší mocnina (nahoře je nejvyšší } x^{4/3}) \right| = -\infty$$
$$\Rightarrow \text{ asymptota neexistuje.}$$

**8. náčrt funkce:**

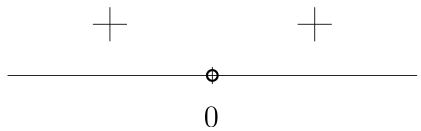


## C. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

**1. definiční obor:** $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

**2. nulové body:** $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4+1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 0 \Rightarrow$ nemá řešení v reálném oboru.

**3. znaménka funkce:**

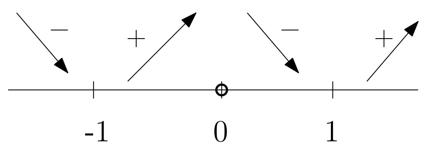



$f(1) = 1 + 1 > 0$
$f(-1) = 1 + 1 > 0$

**4. stacionární body, rostoucí/klesající:**

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^4 - 2}{x^3}.$$

$D(f') = \mathbb{R} - \{0\}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
$\Rightarrow$ stacionární body jsou $x = \pm 1$

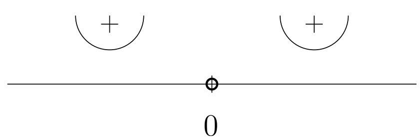



$f'(2) = +/+ > 0$
$f'(1/2) = -/+ < 0$
$f'(-1/2) = -/- > 0$
$f'(-2) = +/- < 0$

**5. konvexní/konkávní, inflexní body:**

$$f''(x) = \frac{8x^3 \cdot x^3 - (2x^4 - 2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^4 + 6}{x^4}$$

$D(f'') = \mathbb{R} - \{0\}$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^4 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -3 \Rightarrow$ nemá řešení v reálném oboru.




$f''(1) = +/+ > 0$
$f''(-1) = +/+ > 0$

Funkce nemá inflexní body.
Typy extrémů můžeme ověřit pomocí dosazení stacionárních bodů:
$f''(1) > 0 \Rightarrow x = 1$ je lokální minimum,
$f''(-1) > 0 \Rightarrow x = -1$ je lokální minimum. Dopočítáním funkčních hodnot máme lokální minima v bodech $[1, 2], [-1, 2]$.

**6. asymptoty bez směrnice:** Asymptoty hledáme v bodě $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} x^2 + \frac{1}{x^2} = |0 + \infty| = \infty.$$

$$\lim_{x \to 0_-} f(x) = \lim_{x \to 0_-} x^2 + \frac{1}{x^2} = |0 + \infty| = \infty.$$

Tedy funkce má v bodě $x = 0$ asymptotu bez směrnice.

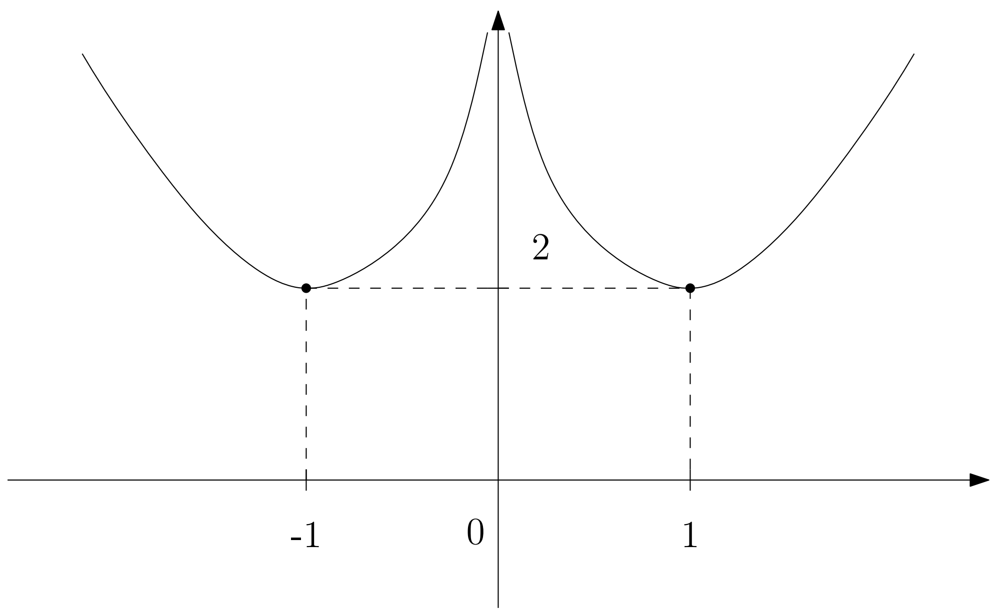
**7. asymptoty se směrnicí:** Hledáme asymptoty $y = k_i x + q_i, i = 1, 2$.
Pro $x \to \infty$

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x^3} = |\infty + 0| = \infty \Rightarrow \text{asymptota neexistuje.}$$

Pro $x \to -\infty$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{1}{x^3} = |-\infty + 0| = -\infty \Rightarrow \text{asymptota neexistuje.}$$

**8. náčrt funkce:**

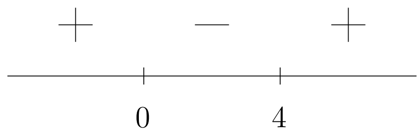


## D. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x}$

**1. definiční obor:** $D(f) = \mathbb{R}$

**2. nulové body:** $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-4)\sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 4$ nebo $x = 0$.

**3. znaménka funkce:**

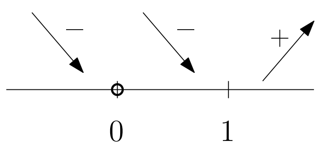



$f(27) = 23 \cdot 3 > 0$
$f(1) = -3 \cdot 1 < 0$
$f(-1) = -5 \cdot (-1) > 0$

**4. stacionární body, rostoucí/klesající:**

$$f'(x) = \sqrt[3]{x} + (x-4)\frac{1}{3}x^{-2/3} = x^{-2/3}\left[x + \frac{x-4}{3}\right] = \frac{4x-4}{3x^{2/3}}.$$

$D(f') = \mathbb{R} - \{0\}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$\Rightarrow$ stacionární bod je $x = 1$

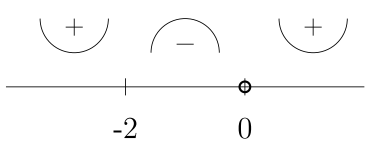



$f'(2) = +/+ > 0$
$f'(1/2) = -/+ < 0$
$f'(-1) = -/+ < 0$

**5. konvexní/konkávní, inflexní body:**

$$f''(x) = \frac{4 \cdot 3x^{2/3} - (4x-4) \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}x^{-1/3}}{9x^{4/3}} = \frac{x^{-1/3}\left[12x - (4x-4) \cdot 2\right]}{9x^{4/3}} = \frac{4x+8}{9x^{5/3}}.$$

$D(f'') = \mathbb{R} - \{0\}$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$




$f''(1) = +/+ > 0$
$f''(-1) = +/- < 0$
$f''(-3) = -/- > 0$

Inflexní bod je $x = -2$.

Typy extrémů můžeme ověřit pomocí dosazení stacionárních bodů:
$f''(1) > 0 \Rightarrow x = 1$ je lokální minimum.
Dopočítáním funkčních hodnot máme lokální minimum v bodě $[1, -3]$.

**6. asymptoty bez směrnice:** Vzhledem k $D(f)$ nejsou žádné asymptoty bez směrnice.

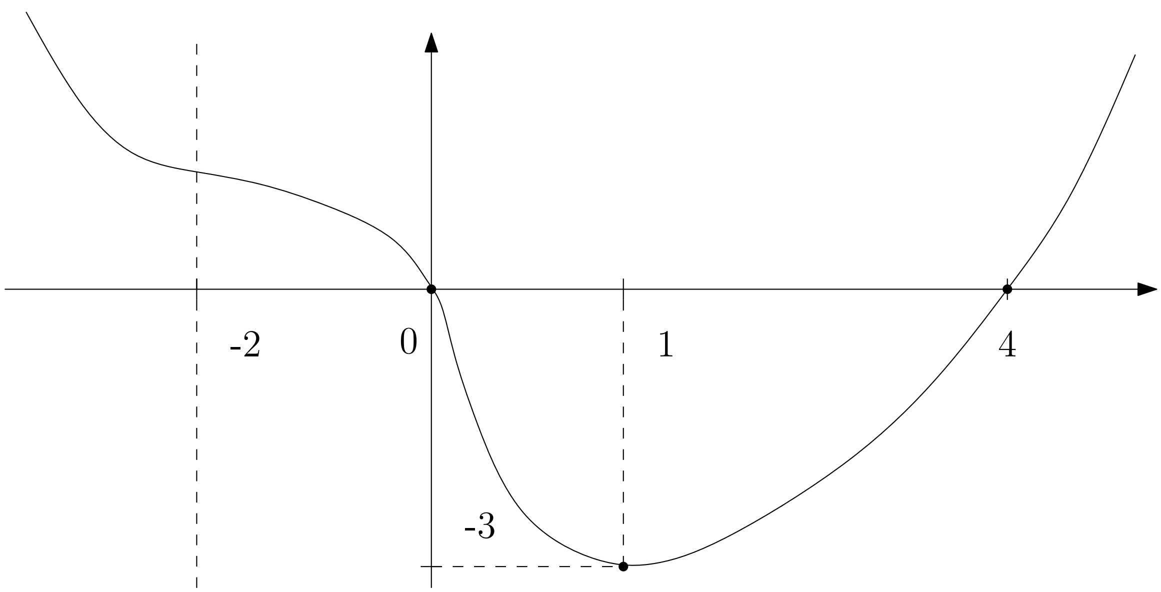
**7. asymptoty se směrnicí:** Hledáme asymptoty $y = k_i x + q_i, i = 1, 2$.
Pro $x \to \infty$

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-4)\sqrt[3]{x}}{x} =$$
$$= \left| \frac{\infty \cdot \infty}{\infty}, \text{ ale nahoře je vyšší mocnina} \right| = \infty \Rightarrow \text{ asymptota se směrnicí neexistuje}$$

Pro $x \to \infty$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-4)\sqrt[3]{x}}{x} =$$
$$= \left| \frac{-\infty \cdot (-\infty)}{-\infty}, \text{ ale nahoře je vyšší mocnina} \right| = -\infty \Rightarrow \text{ asymptota se směrnicí neexistuje}$$

**8. náčrt funkce:**

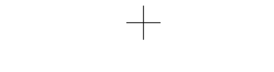


## E. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^{-x^2}$

**1. definiční obor:** $D(f) = \mathbb{R}$

**2. nulové body:** $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow$ nemá řešení.

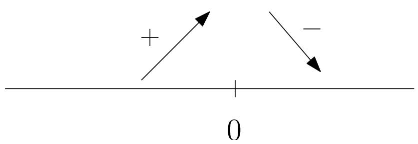
**3. znaménka funkce:**




**4. stacionární body, rostoucí/klesající:**

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x).$$

$D(f') = \mathbb{R}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\Rightarrow$ stacionární bod je $x = 0$

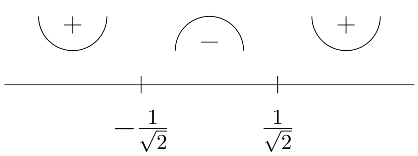



$f'(1) = -2 \cdot e^{-1} < 0$
$f'(-1) = 2 \cdot e^{-1} > 0$

**5. konvexní/konkávní, inflexní body:**

$$f''(x) = e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$$

$D(f'') = \mathbb{R}$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.




$f''(1) = e^{-1} \cdot 2 > 0$
$f''(0) = 1 \cdot (-2) < 0$
$f''(-1) = e^{-1} \cdot 2 > 0$

Inflexní body jsou $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Typy extrémů můžeme ověřit pomocí dosazení stacionárních bodů:
$f''(0) < 0 \Rightarrow x = 0$ je lokální maximum.
Dopočítáním funkčních hodnot máme lokální maximum v bodě $[0, 1]$.

**6. asymptoty bez směrnice:** Vzhledem k $D(f)$ nejsou žádné asymptoty bez směrnice.

**7. asymptoty se směrnicí:** Hledáme asymptoty $y = k_i x + q_i, i = 1, 2$.
Pro $x \to \infty$

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \left|\frac{0}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} e^{-x^2} = |0 \cdot 0| = 0.$$

$$q_1 = \lim_{x\to\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} - 0 \cdot x = |0| = 0.$$

Pro $x \to \infty$ má funkce asymptotu $y = 0$.

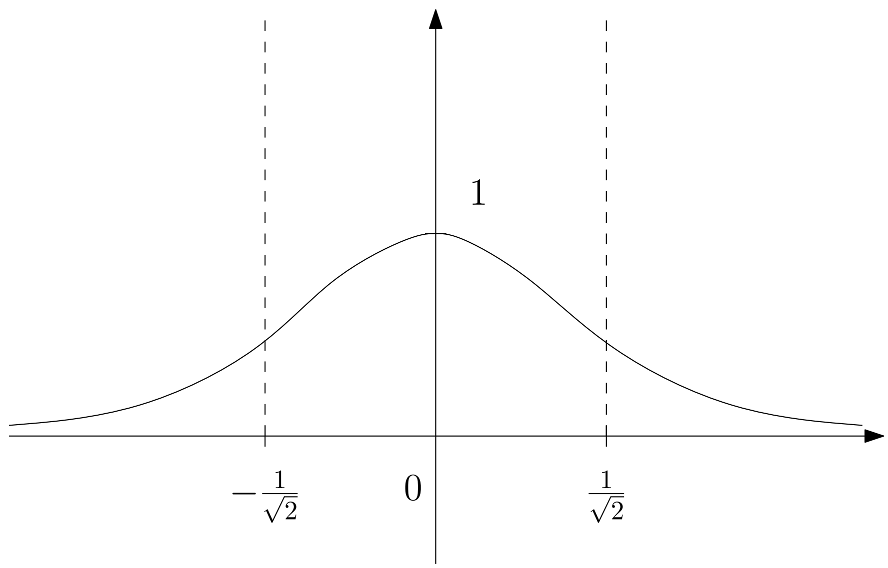
Pro $x \to -\infty$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \left|\frac{0}{-\infty}\right| = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}e^{-x^2} = |0 \cdot 0| = 0.$$

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} - 0 \cdot x = |0| = 0.$$

Pro $x \to -\infty$ má funkce asymptotu $y = 0$.

**8. náčrt funkce:**

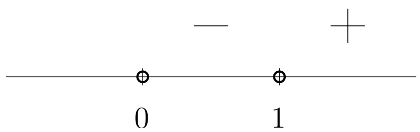


## F. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

**1. definiční obor:** $D(f) = (0, \infty) - \{1\}$

**2. nulové body:** $f(x) = 0$ nemá řešení, protože $x = 0 \notin D(f)$.

**3. znaménka funkce:**

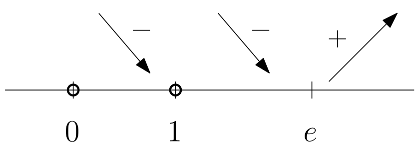



$f(1/2) = \frac{+}{-} < 0$
$f(3) = \frac{+}{+} > 0$

**4. stacionární body, rostoucí/klesající:**

$$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

$D(f') = (0, \infty) - \{1\}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$
$\Rightarrow$ stacionární bod je $x = e$

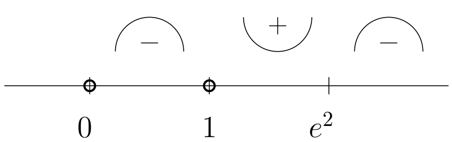



$f'(e^2) = \frac{+}{+} > 0$
$f'(2) = \frac{-}{+} < 0$
$f'(e^{-1}) = \frac{-}{+} < 0$

**5. konvexní/konkávní, inflexní body:**

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1)2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{-\ln x + 2}{x \ln^3 x}.$$

$D(f'') = (0, \infty) - \{1\}$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.




$f''(e^3) = -/+ < 0$
$f''(e^{3/2}) = +/+ > 0$
$f''(e^{-1}) = +/- < 0$

Inflexní bod je $x = e^2$.

Typy extrémů můžeme ověřit pomocí dosazení stacionárních bodů:
$f''(e) > 0 \Rightarrow x = e$ je lokální minimum.
Dopočítáním funkčních hodnot máme lokální minimum v bodě $[e, e]$.

**6. asymptoty bez směrnice:** Asymptoty hledáme v bodech $x = 0$ a $x = 1$.

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} \frac{x}{\ln x} = \left| \frac{0}{-\infty} \right| = \lim_{x \to 0_+} \frac{1}{\ln x} x = |0 \cdot 0| = 0$$

$\Rightarrow$ v tomto bodě není asymptota bez směrnice

Dále

$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} \frac{x}{\ln x} = \left|\frac{1}{0_+}\right| = \infty.$$
$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} \frac{x}{\ln x} = \left|\frac{1}{0_-}\right| = -\infty.$$

$\Rightarrow$ v bodě $x = 1$ je asymptota bez směrnice.

**7. asymptoty se směrnicí:** Hledáme asymptotu $y = kx + q$ pro $x \to \infty$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0.$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

Funkce nemá asymptotu se směrnicí.

**8. náčrt funkce:**